КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
И ЗАДАЧИ
ПО КУРСУ
«ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Часть первая

Учебное пособие под редакцией
проф. В.В. Лебедева

УДК 517 (075.8)
ББК 22.11Я73
К56

Конспект лекций и задачи по курсу «Высшая математика». Часть первая. Учебное пособие под ред. проф. В.В. Лебедева. Издание второе, исправленное и дополненное. – М.: НВТ-Дизайн, 2006 – 96 с.

Конспект лекций по курсу «Высшая математика».
Автор: д. э. н., проф. В.В. Лебедев

Образцы контрольных материалов. Задачи и упражнения.
Авторы: д. э. н., проф. В.В. Лебедев, к. п. н., проф. П.А. Михайлов, к.ф.-м.н., доцент Ю.И. Аганин, к.т.н., доцент А.С. Веселов, ст. преп. М.В. Ефимова, ст. преп. Г.Ю. Паршикова, ст. преп. Э.А. Родимова.

Учебное пособие адресовано студентам Государственного университета управления всех специальностей и всех форм обучения, изучающим курс «Высшая математика» в первом семестре. Состоит из трех частей. В первой части представлен конспект лекций курса «Высшая математика», в котором дано краткое изложение теоретического материала двух разделов учебной программы: «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» и «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии». Во второй части учебного пособия приведены образцы тестов и экзаменационных билетов по курсу высшей математики за первый семестр. В третьей части приведены задачи и упражнения по названным разделам курса, а также их ответы.

Учебное пособие предназначено для использования как на аудиторных занятиях (лекции и семинары), так и при самостоятельной работе студентов. Для систематического изучения курса «Высшая математика» рекомендуется учебное пособие В.В. Лебедева «Математика в экономике и управлении» (М.; - НВТ-Дизайн, 2004). Для помощи в организации работы над этим курсом в каждой лекции Конспекта приведены ссылки на соответствующие страницы этого учебного пособия.

ISBN 5-94680-011-6

Издательство ООО "НВТ-Дизайн"
117133, г. Мостква, ул. Академика Варги, 28. Тел.(495) 514-7479.

Изд. лиц. ИД № 05684 от 24.08.2001 г. Пописано в печать 21.08.2006.
Формат 60 × 88 1/16. Гарнитура Times. Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.
Печ. л. 5,0. Тираж 3000 экз. Заказ 7394
Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП "Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ".
140010, г. Люберцы Московская обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел (495) 554-21-86

СОДЕРЖАНИЕ

1. КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО КУРСУ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция 1 (Часть 1, глава 1, стр. 10 – 36 *)

1. Множество – одно из основных понятий математики. Под словом «множество» подразумевается совокупность тех или иных объектов, объединенных каким-либо общим признаком или свойством. Числовыми множествами называются множества, элементами которых являются числа.

2. Кванторы общности и существования: $\forall x-$ «для всех x», или «для любого x»; $\exists x-$ «для некоторых x», или «существует x». Логические операции: импликация $P \Rightarrow Q$ – «если P, то Q», или «для того, чтобы P, необходимо, чтобы Q», или «для того, чтобы Q, достаточно, чтобы P»; эквиваленция $P \Leftrightarrow Q$ – «если P, то Q, и обратно», или «для того, чтобы P, необходимо и достаточно, чтобы Q».

3. Если объект a является элементом множества A, то пишут: $a \in A$. Если объект a не является элементом множества A, то пишут: $a \notin A$.

4. Множество B называется подмножеством множества A, если каждый элемент множества B является элементом множества A: $B \subset A$, $A \supset B$.

5. Множества A и B равны, если они состоят из одних и тех же элементов. В этом случае пишут: $A = B$. Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A=B$.

6. Объединением двух множеств A и B называется множество, любой элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Если C – объединение множеств A и B, то это множество обозначается так: $C=A \bigcup B$.

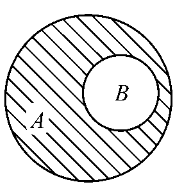

Рис. 1.1

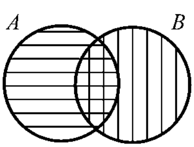

Рис. 1.2

7. Пересечением двух множеств A и B называется множество, элементы которого принадлежат одновременно и множеству A, и множеству B. Если C – пересечение множеств A и B, то это множество обозначается так: $C=A \bigcap B$.

8. Разностью двух множеств A и B (дополнением множества B до множества A) называется множество, элементы которого принадлежат множеству A и при этом не принадлежат множеству B. Если D – разность множеств A и B, то его обозначают так: $D =A \setminus B$.

9. Числовой осью (или числовой прямой) называется прямая, имеющая заданное направление, начало отсчета и единицу масштаба. Любой точке числовой оси соответствует одно действительное число.

* Здесь и далее даны ссылки на учебное пособие В.В. Лебедева «Математика в экономике и управлении» (М.; - НВТ-Дизайн, 2004).

10. Прямоугольной декартовой системой координат (ПДСК) на плоскости называют две взаимно перпендикулярные числовые оси, имеющие общее начало отсчета и одинаковые единицы масштаба. Каждой точке плоскости соответствуют два числа – абсцисса и ордината, которые представляют собой координаты точки.

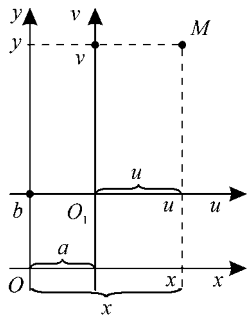

Рис. 1.3

11. Пусть ПДСК O_1uv получается из ПДСК Oxy параллельным переносом координатных осей, причем x, y – старые координаты, u, v – новые координаты, a, b – координаты нового начала O_1 в старой системе координат (рис. 1.3). Тогда $u = x - a$, $v = y - b$.

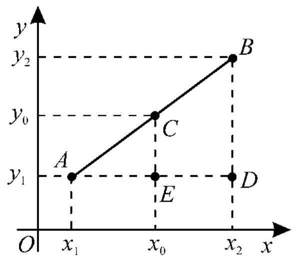

Рис. 1.4

12. Пусть даны две точки – $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$. Координаты точки $C(x_0;y_0)$, которая делит отрезок AB в отношении $AC/AB = \mu$, определяются по формулам

$$x_0 = (1-\mu)x_1 + \mu x_2,\quad y_0 = (1-\mu)y_1 + \mu y_2.$$

Если точка $C(x_0;y_0)$ делит отрезок AB в отношении $AC/CB = \lambda$, то ее координаты вычисляются по следующим формулам:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

Координаты середины отрезка AB вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

13. Расстояние d между двумя точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

14. Уравнение $F(x;y) = 0$ называется уравнением линии на плоскости Oxy, если ему удовлетворяют координаты любой точки $M(x;y)$, лежащей на линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на ней.

15. Окружность на плоскости Oxy с центром в точке $M_0(a; b)$ и радиусом R задается уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. Круг, ограниченный этой окружностью, задается неравенством $(x-a)^2+(y-b)^2 \le R^2$.

16. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек (фокусов) есть величина постоянная.

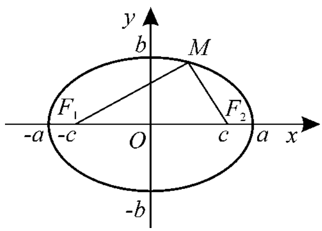

Рис. 1.5

17. Если $M(x;\, y)$ – произвольная точка эллипса, точки $F_1(-c;\, 0)$ и $F_2\,(c;\, 0)$ – фокусы эллипса (здесь $c \geq 0$), сумма фокальных радиусов эллипса (длин отрезков F_1M и F_2M) равна $2a$, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, то уравнение такого эллипса имеет следующий вид :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

18. Если $c = 0$, т.е. оба фокуса эллипса находятся в начале координат, то такой эллипс есть окружность радиуса a с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 = a^2\,.$$

19. Гиперболой называется множество всех точек плоскости, для каждой из которых абсолютное значение разности расстояний до двух фиксированных точек (фокусов) есть величина постоянная.

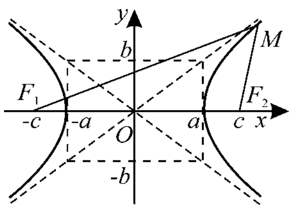

Рис. 1.6

20. Если $F_1(-c;\, 0)$ и $F_2\,(c;\, 0)$ – фокусы гиперболы (здесь $c > 0$), абсолютное значение разности фокальных радиусов F_1M и F_2M произвольной точки гиперболы $M(x;\, y)$ равно $2a$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, то уравнение такой гиперболы имеет следующий вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

21. *Пример.* Если фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-1;\, -1)$ и $F_2\,(1;1)$, абсолютное значение разности фокальных радиусов F_1M и F_2M точки $M(x;\, y)$ равно 2, то $2xy = 1$ – уравнение такой гиперболы.

Лекция 2 (Часть 1, глава 2, стр. 37 – 66)

1. Пусть имеется некоторое множество действительных чисел X. Если любому числу x из множества X соответствует (по некоторому правилу) одно действительное число y, то величина y называется функцией величины x, определенной на множестве X (говорят также, что на множестве X задана функция y от x). Множество X называют *областью определения функции*, переменную x – *независимой переменной* или *аргументом*, переменную y – *зависимой переменной* (или функцией). Множество Y всех значений, которые может принимать переменная y, называют *областью значений функции*.

Для обозначения функции y от x обычно используют букву f и пишут: $y = f(x)$. Наряду с этим применяются и другие обозначения: $y = g(x)$, $y = h(x)$... Область определения функции $f(x)$ часто обозначают так: $D(f)$.

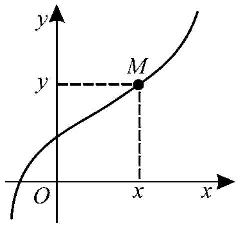

Рис. 2.1

2. Графиком функции $y = f(x)$ в прямоугольной декартовой системе координат называется множество всех точек $M(x; f(x))$ плоскости Oxy, абсциссы которых равны значениям независимой переменной x, а ординаты – соответствующим значениям функции (рис. 2.1).

3. Если функция $y = f(x)$ задана аналитически и если нет каких-либо дополнительных условий, то *областью определения* такой функции называется множество всех значений аргумента x, при которых уравнение $y = f(x)$ имеет смысл. Такую область определения называют также *областью существования функции.*

4. Функция называется явной, если она задана уравнением, разрешенным относительно зависимой переменной y. Явная функция y от x задается формулой $y = f(x)$, которая устанавливает, какие вычислительные операции нужно выполнить над числом x, чтобы получить значение числа y.

5. Функция y от x называется неявной, если она задана уравнением вида $F(x,y) = 0$, которое не разрешено относительно зависимой переменной y. При этом каждому значению x из некоторого множества ставится в соответствие такое единственное значение y, что $F(x, y) = 0$.

6. *Пример.* Уравнение линейной функции: $y = kx+b$, где b – ордината точки пересечения прямой с осью ординат, $k = tg\alpha$.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$, с угловым коэффициентом:

$$y = y_0 + k\,(x - x_0).$$

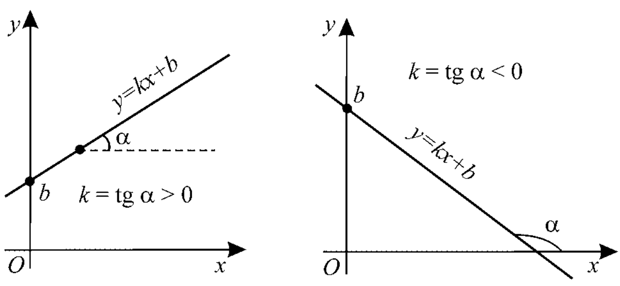

Рис. 2.2

Уравнения прямой, проходящей через точки $M(x_0; y_0)$ и $M(x_1; y_1)$:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}; \qquad y = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \cdot y_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot y_2 .$$

Уравнение прямой в отрезках (неявная зависимость y от x):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Общее уравнение прямой (неявная зависимость):

$$Ax + By + C = 0.$$

7. *Пример.* Уравнение эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ с дополнительным условием $y \geq 0$ задает неявную функцию y от x, графиком которой служит верхняя дуга эллипса.

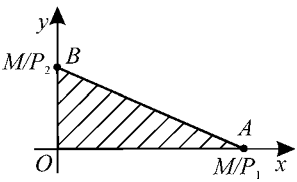

Рис. 2.3

8. *Пример.* Бюджетное множество определяет на плоскости товаров Oxy доступные для покупателя наборы двух товаров в количествах x и y, если на приобретение этих товаров можно израсходовать не более M руб., а цены товаров равны соответственно P_1 и P_2. Бюджетное множество в этом случае задается неравенствами: $P_1 x + P_2 y \leq M$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Уравнение $P_1 x + P_2 y = M$ задает на плоскости Oxy прямую, отрезок AB которой называют *бюджетной линией.*

9. Если на множестве X определена функция $y = f(x)$, причем Y – множество ее значений, то обратной по отношению к функции $y = f(x)$ называется функция $x = g(y)$, которая удовлетворяет следующим двум условиям:

1) эта функция определена на множестве Y;
2) эта функция ставит в соответствие каждому числу $y \in Y$ такое единственное $x \in X$, что $f(x) = y$.

Для нахождения функции $x = g(y)$, обратной к функции $y = f(x)$, необходимо решить уравнение $y = f(x)$ относительно x.

10. Для существования функции $x = g(y)$, обратной по отношению к функции $y = f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $y = f(x)$ принимала различные значения при различных значениях аргумента, т. е. чтобы выполнялось неравенство $f(x_1) \neq f(x_2)$ при $x_1 \neq x_2$.

11. *Пример.* Функция спроса $Q(P)$ определяет количество товара, которое покупатели готовы приобрести при заданной цене. Пусть задана

функция спроса $Q = 100 - 2P$. Здесь цена товара P является аргументом, а количество товара Q , которое покупатели готовы приобрести, – функцией. Разрешив уравнение функции спроса относительно переменной P, получим функцию, обратную к функции спроса: $P = \dfrac{100-Q}{2}$. Эта зависимость P от Q определяет значение максимально возможной цены P, при которой весь товар в количестве Q может быть продан.

12. Говоря об обратной функции, часто используют стандартные обозначения, понимая под x независимую переменную, а под y – функцию (зависимую переменную). В этом случае для записи обратной функции вместо $x = g(y)$ пишут формально $y = g(x)$, заменив x на y, а y на x.
Функция $x = \log_2 y$ - обратная для функции $y = 2^x$; функция $x = \sqrt{y}$ – обратная для функции $y = x^2$, рассматриваемой при $x \geq 0$.

13. *Параметрическая зависимость* y от x: зависимость между переменными y и x определяется с помощью функций $x = \psi(t)$ и $y = \varphi(t)$, где $t \in (\alpha, \beta)$. Здесь переменная t является параметром.

14. *Сложная функция.* Пусть переменная y является функцией от u, а u, в свою очередь, является функцией от x: $y = f(u)$, $u = g(x)$. Тогда y является сложной функцией от независимой переменной x: $y = f(g(x))$.

15. Областью определения сложной функции $y = f(g(x))$ является множество таких x, для которых значения $g(x)$ входят в область определения функции $f(u)$. Переменную u называют промежуточным аргументом.

Лекция 3 (Часть 1, глава 3, стр. 67 – 88)

1. Функция $y = f(x)$ называется строго возрастающей на множестве $G \in D(f)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству G и связанных соотношением $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

2. Функция $y = f(x)$ называется строго убывающей на множестве $G \in D(f)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих множеству G и связанных соотношением $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

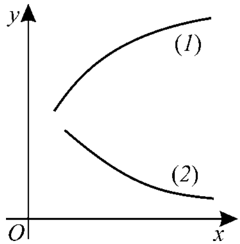

Рис.3.1

На рис.3.1 приведены графики двух функций. Одна из них является строго возрастающей (1), а другая – строго убывающей (2).

3. Пусть x_1 и x_2 – значения аргумента, которым соответствуют значения функции $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$. Разность $\Delta x = x_2 - x_1$ называется приращением аргумента в точке x_1, а разность $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ – приращением

3. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Дифференциальное исчисление функций одной переменной

1. Введение в математический анализ

Группа А

1. Изобразить на числовой прямой множества:

1.1. $A=(1;2]$; 1.2. $B=(-2;1)\cup[0;2]$; 1.3. $C=(-2;1)\cap[0;2]$.

2. Построить графики функций:

2.1. $y=0$; 2.2. $y=-1$; 2.3. $y=2$; 2.4. $y=x$; 2.5. $y=-x$;

2.6. $y=2x$; 2.7. $y=-2x$; 2.8. $y=x-3$; 2.9. $y=-3x+6$; 2.10. $y=3x-6$.

3. Выделить полный квадрат в квадратном трехчлене:

3.1. x^2+4x+1; 3.2. x^2+6x+7; 3.3. $2x^2-4x+11$; 3.4. $3x^2+15x$.

4. Разложить квадратный трехчлен на линейные множители:

4.1. x^2+8x-9; 4.2. $2x^2+11x+14$; 4.3. $3x^2-3x-18$; 4.4. $4x^2-12x+9$.

5. Построить графики функций:

5.1. $y=x^2$; 5.2. $y=-x^2$; 5.3. $y=x^2-9$; 5.4. $y=(x+3)^2$;

5.5. $y=-(x+1)^2+4$; 5.6. $y=(2-x)(x+4)$; 5.7. $y=2x^2+x-1$;

5.8. $y=\dfrac{1}{2-x}$; 5.9. $y=2-\dfrac{4}{x}$; 5.10. $y=\dfrac{3x+6}{x-2}$; 5.11. $y=\dfrac{4-2x}{x+1}$.

6. Построить линии, заданные уравнениями:

6.1. $x=0$; 6.2. $x = 1,5$; 6.3. $x = -3$; 6.4. $x + y + 1 = 0$; 6.5. $6x + 3y + 1 = 0$;

6.6. $x=y^2$; 6.7. $x=-y^2+9$; 6.8. $x=(y-2)^2$; 6.9. $y^2+2y+x-8=0$.

7. На координатной плоскости Oxy штриховкой отметить множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

7.1. $\begin{cases} y\ge -x+5 \\ y\le 5 \\ x\le 5 \end{cases}$; 7.2. $\begin{cases} x^2-y-1<0 \\ x-y+1>0 \end{cases}$; 7.3. $\begin{cases} y>(x-1)(x+5) \\ y<-x^2-x+2 \end{cases}$.

8. Построить бюджетное множество, отражающее покупательные возможности потребителя двух товаров, если на приобретение этих товаров может быть израсходовано не более 120 рублей и известно, что цены то-

варов 30 рублей и 20 рублей соответственно. Какое уравнение имеет бюджетная линия? Принадлежат ли точки (0; 6); (4; 0); (2; 3); (1; 3); (2;4) бюджетной линии? Какое значение (по смыслу задачи) имеет положение точки бюджетного множества «ниже» или «на» бюджетной линии?

9. Спрос на некоторый товар при цене 50 рублей за единицу товара равен 450 единицам товара, а при цене 80 рублей за единицу товара спрос равен 360 единицам товара. Предполагая, что спрос линейно зависит от цены, вывести уравнение зависимости спроса от цены и определить спрос при цене 90 рублей за единицу товара.

10. Функция прибыли однопродуктовой фирмы задана уравнением $I(x) = ax^2 + bx + c$, где x – объем выпуска продукции. Построить график функции прибыли, если $a = -3, b = 6, c = -1$.

11. Заданы функции спроса $(D(p))$ и предложения $(S(p))$ на некоторый вид продукции, где p – цена за единицу продукции. При каком значении p наступает равновесие спроса и предложения, если:

а) $D(p) = -p + 5;\ S(p) = 0{,}75p + 1{,}5$;

б) $D(p) = 12000 - 0{,}2p;\ S(p) = 3000 + 0{,}1p;$

в) $D(p) = 0{,}25(19 - p^2 - 2p);\ S(p) = 0{,}25(4p + 3).$

Решения проиллюстрировать графиками.

12. Отчисления в пенсионный фонд составляют 2% от заработка. Сколько рублей отчисляется в пенсионный фонд при заработке 3100 рублей?

13. Подоходный налог составил 375 рублей. Какова величина дохода, если ставка подоходного налога равна 10%?

14. В январе цех выпустил 80 изделий, а в феврале 64 изделия. На сколько процентов выпуск изделий в январе превышает выпуск продукции в феврале?

Группа Б

1. Построить графики функций:

1.1. $y = |x| - 2;$ 1.2. $y = |x - 2|;$ 1.3. $y = 3|x - 2| + 4;$

1.4. $y = (|x| + 1)(|x| - 3);$ 1.5. $y = 2|x| - x^2;$ 1.6. $y = \left|x^2 + 4x\right|;$

1.7. $y = (|x| - 1)\cdot|x - 1|;$

1.8. $y = \dfrac{x^3 - 2x^2}{|2 - x|};$ 1.9. $y = \dfrac{x(x+2)}{|x(x+2)|};$ 1.10. $y = \left|\dfrac{2x - 4}{x + 1}\right|;$ 1.11. $y = \dfrac{2|x| - 4}{|x| + 1}.$

2. На координатной плоскости Oxy штриховкой отметить множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

2.1. $(x-1)(y+2)\geq 0$; 2.2. $x^2-x<y-xy$; 2.3. $\begin{cases} 2x+y^2\leq 0 \\ x+2\geq 0 \\ y^2-1\leq 0 \end{cases}$;

2.4. $\begin{cases} y^2\leq (x+1)^2 \\ y^2\leq 1-x \end{cases}$; 2.5. $\begin{cases} y^2+2xy-3x^2\leq 0 \\ x^2+2x-y\leq 0 \end{cases}$; 2.6. $\begin{cases} 2y-x^2\geq 0 \\ x^2-y^2\geq 0 \end{cases}$.

2.7. Найти наименьшее значение суммы $x+y$, если x и y удовлетворяют условиям: $x\geq 0$; $y\geq 0$; $y\leq -x^2+16$; $y\geq -2x+4$; $y\geq -0{,}5x+2$.

2.8. Найти наибольшее значение суммы $x+y$, если x и y удовлетворяют условиям: $x\geq 0$; $0\leq y\leq 5$; $y\geq \dfrac{-2x+4}{x+1}$; $y\leq -5x+15$.

3.На фирме работает 25 человек. Известно, что 18 из них являются владельцами акций нефтяной компании, а 19 – владельцами автомобильной компании. Какая часть сотрудников фирмы (в процентах) владеет акциями обеих компаний, если каждый сотрудник является обладателем хотя бы одной акции?

4. На фирме работает 40 человек. Известно, что 25 человек из них использовали отпуск в летнее время, а 27 человек – в зимнее. Какая часть сотрудников фирмы (в процентах) использовали отпуск и в летнее, и в зимнее время (деля отпуск на две части), если каждый сотрудник фирмы побывал в отпуске?

5. Количество студентов ВУЗа, увеличиваясь на одно и то же число процентов ежегодно (по сравнению с предыдущим годом), возросло за три года с 5000 до 6655 человек. На сколько процентов увеличивалось число студентов ежегодно?

6. Прирост продукции завода по сравнению с предыдущим годом составил за первый год a %, за второй год b %. Каким должен быть прирост продукции за третий год, чтобы средний годовой прирост продукции за три года был бы равен c %?

7. Из общего количества товара a % товаров продано с прибылью p %, а из оставшейся части b % продано с прибылью q %. С какой прибылью продана вся остальная часть товара, если общий процент прибыли составил c %?

2. Свойства функций

Группа А

1. Найти область определения функции:

1.1. $y=\dfrac{x^2}{x+1}$; 1.2. $y=\dfrac{2x-4}{x^2+9}$; 1.3. $y=\sqrt{-x}$; 1.4. $y=\sqrt{3x-x^2}$;

1.5. $y=x\cdot\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}}$; 1.6. $y=\ln\dfrac{x+2}{x-4}$; 1.7. $y=\lg(x+2)+\lg(x-4)$.

2. Задана функция $f(x)=\begin{cases}2x+3 & \text{при } -1\le x\le 0\\ x+2 & \text{при } 0<x\le 1\end{cases}$.

а) Указать область определения этой функции;

б) вычислить $f(-\dfrac{1}{2})$; $f(\dfrac{1}{2})$.

3. Исследовать функцию на четность:

3.1. $y=3x+4$; 3.2. $y=-2x^2$; 3.3. $y=x^3+2x$; 3.4. $y=\sqrt{9-x^2}$;

3.5. $y=\dfrac{x}{x^2-4}$; 3.6. $y=x^3-x^2$; 3.7. $y=\dfrac{x-3}{x+1}$; 3.8. $y=\ln(x+2)$.

4. Построить графики функций и указать интервалы монотонности:

4.1. $y=3x+5$; 4.2. $2x+y+1=0$; 4.3. $y=-2x^2$; 4.4. $y=(x+1)^2$;

4.5. $y=x^2-4x$; 4.6. $y=\dfrac{2}{x}$; 4.7. $y=2-\dfrac{4}{x}$; 4.8. $y=\dfrac{6+3x}{x-1}$.

5. Найти функцию, обратную данной и, используя стандартные обозначения: x – аргумент, y – функция, построить (в одной системе координат Oxy) график данной функции и функции, ей обратной:

5.1. $y=3x-9$; 5.2. $y=x^2+4$, $x\le 0$; 5.3. $y=e^x$; 5.4. $y=\log_2 x$.

6. Построить кривые, заданные уравнениями:

6.1. $x^2+y^2=16$; 6.2. $(x-1)^2+(y+2)^2=16$; 6.3. $x^2+2x+y^2=3$;

6.4. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$; 6.5. $(x+3)^2+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$; 6.6. $4x^2+y^2=4$;

6.7. $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$; 6.8. $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=-1$; 6.9. $\dfrac{(x-2)^2}{16}-\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$.

7. Написать уравнение окружности с центром в точке $C(-4;\,3)$ и радиусом $R=5$. Построить окружность. Принадлежат ли этой окружности точки $A(-1;\,-1)$; $B(3;\,2)$; $O(0;\,0)$?

Группа Б

1. Найти область определения и множество значений функции:

1.1. $y=\sqrt{2+x-x^2}$; 1.2. $y=\ln(4-x^2)$; 1.3. $y=\dfrac{1}{1-x^2}$;

1.4. $y=\dfrac{1}{(1-x)^2}$; 1.5. $y=\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$; 1.6. $y=\sqrt{\cos x-1}$.

2. Задана функция $y=\operatorname{sgn}x$, где $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, x<0\\ 0, \ x=0\\ 1, x>0\end{cases}$.

Построить в плоскости Oxy графики функций:

2.1. $y=\operatorname{sgn}(x-4)$; 2.2. $y=\operatorname{sgn}(x^2-4)$; 2.3. $y=\operatorname{sgn}(\cos x)$.

3. При каждом фиксированном значении x найти функцию

$\varphi(h)=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, если:

3.1. $f(x)=ax+b$; 3.2. $f(x)=x^2$.

4. Исследовать функцию на четность:

4.1. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$; 4.2. $y=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;

4.3. $y=\dfrac{e^x+\dfrac{1}{e^x}}{2}$; 4.4. $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; 4.5. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

5. Исследовать функцию на монотонность, используя определение:

5.1. $y=5x-4$; 5.2. $y=(x+1)^2-4$; 5.3 $y=2+\dfrac{1}{x}$; 5.4. $y=\dfrac{x+4}{2-x}$.

6. Исследовать функцию на выпуклость, используя определение:

6.1. $y=\dfrac{1}{x}$; 6.2. $y=x^2$; 6.3. $y=\sqrt{x}$; 6.4. $y=x^3+2x$.

7. Найти функцию, обратную данной $y=f(x)$. Используя стандартные обозначения (x – аргумент, y – функция) построить в одной системе координат Oxy графики данной функции и функции, ей обратной:

7.1. $f(x)=(x-2)^2-1, \quad x\ge 2$; 7.2. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x>0;\\ x, & x\le 0;\end{cases}$

7.3. $f(x)=x^2, \quad x\in[-1;0]\cup(1;+\infty)$. 7.4. $f(x)=x^2, \quad x\in[-2;-1]\cup(2;+\infty)$.

8. Построить в плоскости Oxy линии, заданные уравнениями:

8.1. $x^2+y^2-4x+6y+9=0$; 8.2. $y=4-\sqrt{9-(x-1)^2}$;

8.3. $x^2+9y^2-2x+36y+28=0$; 8.4. $y=2+2\cdot\sqrt{1-(x+1)^2}$;

8.5. $9x^2-16y^2-64y=208$; 8.6. $x=-3-2\cdot\sqrt{y^2-1}$.

9. Фокусы гиперболы находятся в точках $F_1(-1;-1)$; $F_2(1;1)$. Составить уравнение гиперболы, если для каждой ее точки $M(x;y)$ выполняется условие: $|F_1M-F_2M|=2$.

10. Построить в плоскости Oxy кривые, заданные параметрически:

10.1. $x=2\cos t$; $y=2\sin t$; $t\in[0;2\pi)$;

10.2. $x=2\cos t$; $y=3\sin t$; $t\in[0;2\pi)$;

10.3. $x=\dfrac{2}{\sin t}$; $y=3\operatorname{ctg} t$; $t\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$;

10.4. $x=t^2$; $y=2t$; $t\in R$.

11. Пусть Q – объем производства, C – полные издержки производства. Функция полных издержек фирмы задана уравнением: $C(Q)=Q^2+4Q+15$. Цена товара на рынке равна 20 рублям за единицу продукции. Определить: а) область безубыточности фирмы; б) при каком объеме производства фирма получит максимальную прибыль, если весь товар находит покупателя?

Основные понятия теории пределов

Группа А 1. Написать первые четыре члена числовой последовательности, заданной уравнением:

n .